

LNF-63/27
26. 4. 1963.

E. Ferlenghi, M. A. Spano, G. Verri: PRODUZIONE DI COPPIE DI ELETTRONI IN CONVERTITORI SPESSI PER ENERGIE DI ELETTRONI PRIMARI TRA 30 E 200 MeV. CALCOLO NUMERICO COL METODO MONTECARLO. -

Nota interna : n. 196

LNF-63/27

Nota interna: n° 196
26 Aprile 1963

E. Ferlenghi, M.A. Spano, G. Verri: PRODUZIONE DI COPPIE DI ELETTRONI IN CONVERTITORI SPESSI PER ENERGIE DI ELETTRONI PRIMARI TRA 30 E 200 MeV. CALCOLO NUMERICO COL METODO MONTECARLO.

1. INTRODUZIONE.

In vista di una migliore conoscenza dei problemi relativi all'iniezione di un fascio di positroni in Adone è stato pianificato un calcolo che deve essere elaborato su calcolatore elettronico, per ottenere le caratteristiche fondamentali del processo di conversione degli elettroni in positroni, quando i primi attraversano una targhetta di un certo materiale.

Nel calcolo presente si intendono trovare le condizioni ottimali per il fascio di positroni all'uscita del convertitore al variare dell'energia del fascio (considerato essere monocromatico) di elettroni in entrata della targhetta. Avendo presenti le caratteristiche dell'acceleratore lineare, che fungerà da iniettore per Adone, l'intervallo di energie, che può assumere il fascio di elettroni incidenti sul convertitore, varia da 30 MeV a 200 MeV.

Per questi valori dell'energia delle particelle incidenti non è possibile seguire gli elettroni soltanto dal punto di vista del loro sviluppo longitudinale (lungo la direzione d'incidenza del fascio) in sciami.

E' noto che ad energie (relativamente) basse, quali sono quelle da noi prese in considerazione, non possono essere trascurate le deviazioni angolari e radiali (perpendicolarmente alla direzione d'incidenza del fascio) delle particelle cariche. Quindi, particolare attenzione è stata rivolta alla distribuzione angolare e radiale, oltre che in energie, del fascio di positroni uscente dal convertitore.

L'intervallo d'energia entro il quale sono distribuiti i positroni che ci interessano dal punto di vista della loro ultime accelerazione nella seconda parte dell'acceleratore lineare, va da 7 a 12 MeV.

E' stata altresì curata la distribuzione angolare e in energia delle particelle γ uscenti dalla targhetta.

Tenendo conto del fatto che da alcuni dati sperimentali [cfr. per esempio (1)] si può dedurre che il valore ottimale dello spessore della targhetta, relativamente al coefficiente di conversione, non supera le 2 lunghezze di radiazione, si è impostato il calcolo in modo da osservare l'andamento dei vari parametri delle particelle uscenti dal convertitore al variare dello spessore di quest'ultimo da 0,4 lr a 2 lr.

Vengono inoltre calcolate le perdite d'energia per ionizzazione delle particelle cariche all'interno della targhetta. Ciò ha interesse per determinare il comportamento termico del convertitore, quando viene colpito da un fascio di elettroni che sciama danno luogo ad una distribuzione delle perdite lungo l'asse del convertitore.

2. PROCESSI FISICI E CRITERI DI CALCOLO.

I processi fisici presi in considerazione nel calcolo sono i seguenti:

- a) bremsstrahlung,
- b) creazione di coppie,
- c) scattering multiplo,
- d) perdite per ionizzazione.

Una volta fissati i tipi di interazione ritenuti più rilevanti per la descrizione del passaggio di un fascio di elettroni attraverso la targhetta e del processo di conversione, rimane stabilito anche lo schema di calcolo che comporta lo studio statistico di un certo numero di elettroni incidenti sul convertitore e degli sciami da essi prodotti. Il metodo seguito per tale studio statistico è il metodo Monte Carlo.

Per il nostro calcolo lo schema tipico di produzione degli sciami è quello dato in fig. 1, in cui è rappresentata una delle possibili storie di una cascata.

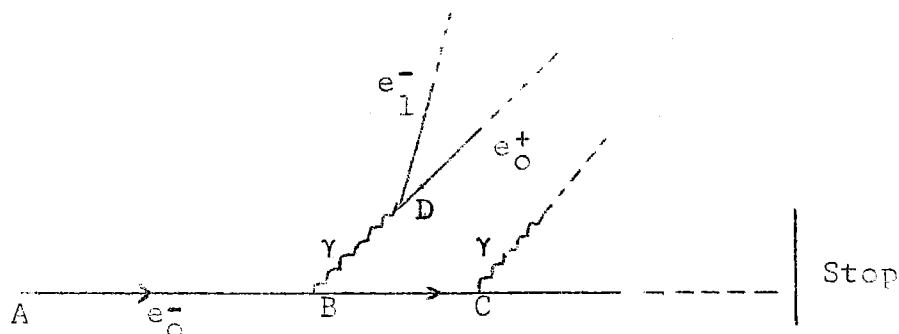


FIG. 1

La particella carica (ad esempio l'elettrone e_0^- , che entra nella targhetta nel punto A) può emettere una particella γ (nel punto B) di energia sufficiente a creare una coppia $e_0^+ - e_1^-$ (nel punto D). A loro volta queste particelle di prima generazione possono dare luogo ad altri γ , di energia tale da poter creare nuove coppie; ecc. Questi processi, assieme a quelli di scattering multiplo e di perdita d'energia per ionizzazione per le particelle cariche (che hanno luogo tra un evento e l'altro, cioè per esempio tra i punti A e B, o B e C), devono essere seguiti fino ad un certo limite (stop), che viene determinato o dal fatto che la particella che si sta seguendo ha attraversato tutta la targhetta oppure da considerazioni di carattere fisico che preciseremo nel seguito (vedi 2 - II - a,b).

I) Processi fisici.

Vediamo ora in dettaglio come vengono trattati i vari processi:

a) Bremsstrahlung.

Come è noto la sezione d'urto $\phi(E,K)dK$ per emissione di particelle γ presenta una divergenza per piccoli valori dell'energia K del γ , essendo

$$\phi(E,K)dK \sim dK/K$$

dove E è l'energia della particella carica che irraggia. Onde evitare questa divergenza si è imposto un taglio inferiore sulle energie dei γ che possono essere emessi dalla particella carica, partendo dalla considerazione che soltanto i γ con energia superiore a $2 mc^2$ possono produrre coppia $e^+ - e^-$. In tal modo l'omissione di γ viene trattata in due modi diversi, a seconda che l'energia dei γ emessi sia inferiore o superiore a $2 mc^2$.

Nel primo caso si può pensare che l'emissione di γ , con $K < 2 mc^2$, avvenga in modo continuo, ragione per cui si può considerare che la particella carica perda energia in modo continuo a causa di questo irraggiamento.

Questa perdita d'energia può essere calcolata in base alle seguenti considerazioni: se $\phi(E,K)dK$ è la sezione d'urto per bremsstrahlung per lunghezza di radiazione (lr), le perdite d'energia dovute all'irraggiamento di γ con $K < 2 mc^2$ su una lr saranno date da

$$(1) \quad K_{irr}(E) = \int_0^{2mc^2} K\phi(E,K)dK$$

L'emissione di γ con energia maggiore di $2 mc^2$ conserva invece il suo carattere discontinuo. La tecnica da noi seguita per determinare il punto in cui avviene l'emissione del γ di questo tipo è così definita: se E è l'energia della particella carica al momento di irraggiare il γ , e $\phi(E,K)dK$ è la sezione d'urto del processo per lr allora

$$(2) \quad p(E) = \int_{2mc^2}^{E-mc^2} \phi(E,K) dK$$

definirà la probabilità totale d'irraggiamento per la cella carica. L'integrale che compare nella (2) è esteso da $2mc^2$ a $(E-mc^2)$ per la considerazione già fatta che dal punto di vista della creazione di coppie soltanto particelle con $K > 2mc^2$ debbono essere seguite. Conoscendo la $p(E)$, al parametro x , profondità a cui avviene l'emissione del γ , è attribuita una funzione di distribuzione

$$(3) \quad f(x) dx = p(E) e^{-p(E)x} dx$$

da cui occorre estrarre a caso una \bar{x} , che rappresenta il punto in cui è avvenuto l'irraggiamento.

A proposito della (3) occorre osservare che in essa compare la $p(E)$ che è funzione dell'energia della particella che irraggia. Poichè questa energia degrada in modo continuo a causa delle perdite per ionizzazione e per irraggiamento di γ di bassa energia ($K < 2mc^2$), anche la $p(E)$ è funzione variabile da punto a punto. Al fine, quindi, di semplificare il calcolo si introduce la seguente schematizzazione: lo spessore della targhetta-convertitore viene suddivisa in strati sottili, di uguale lunghezza, all'interno di ognuno dei quali l'energia della particella carica può essere considerata costante. Di conseguenza in ogni strato alla particella carica competerà un'energia costante, uguale all'energia posseduta nello strato precedente meno le perdite per ionizzazione e irraggiamento di γ di bassa energia (ed eventualmente anche di γ con $K > 2mc^2$). Perciò all'interno di ogni strato anche la $p(E)$ avrà un valore costante.

In tal modo, però, la distribuzione (3) cambia da strato a strato, variando la $p(E)$, e quindi la \bar{x} estratta a caso da essa deve essere raffrontata con la lunghezza dello strato. Così, essendo s la lunghezza di ogni strato, se risulterà $\bar{x} < s$ (avendo estratto la \bar{x} da una distribuzione (3) caratteristica dello strato i -esimo) si considererà avvenuta l'emissione di un γ nello strato i -esimo; se invece risulterà $\bar{x} > s$, nello strato i -esimo non si sarà verificato tale evento, e si dovrà passare allo strato successivo, per il quale si ripeterà l'operazione con un valore diverso della energia della particella che irraggia.

Laddove si è verificato l'evento si procede alla scelta del valore dell'energia del γ emesso, scelta che sarà fatta a caso basandosi sulla sezione d'urto $\phi(E,K)dK$. In questa trattazione anche le perdite $K_{irr}(E)$ definite dalla (1) vengono calcolate in ciascun strato come valore costante di energia che compete a tale strato.

b) Produzione di coppie.

Un procedimento analogo a quello seguito per la bremsstrahlung è usato per determinare la profondità alla quale i γ creano coppie.

Conoscendo la sezione d'urto $\phi_D(K, E')dE'$ per la creazione di un positrone di energia cinetica E' da parte di un γ di energia K , se la si integra su tutti i valori possibili della E' si otterrà la probabilità totale di creare coppia per una lr:

$$(4) \quad p(K) = \int_0^{K-2mc^2} \phi_D(K, E')dE'$$

Allora alla profondità a cui avviene l'evento si attribuisce la funzione di distribuzione

$$(5) \quad f(x)dx = p(K) e^{-p(K)x} dx$$

dalla quale dovrà essere estratto a caso il punto \bar{x} , in cui nasce la coppia.

Rispetto al calcolo per la bremsstrahlung, questo relativo alla creazione di e^+e^- è semplificato dall'assunzione che abbiamo fatto che l'energia K del γ possa considerarsi costante. Quindi, una volta scelta la \bar{x} , coordinata dal punto d'emissione della coppia, dalla (5), per decidere se l'evento ha avuto luogo o meno basta confrontare la \bar{x} con la lunghezza complessiva L del convertitore: se $\bar{x} < L$ l'evento è avvenuto; se $\bar{x} > L$ l'evento non si considera avvenuto.

In quest'ultimo caso il γ viene registrato in uscita dalla targhetta. Invece i prodotti del γ creati all'interno della targhetta, vengono seguiti ulteriormente e in modo differenziato a seconda che siano prodotti di 1^a e 2^a generazione (vedi 2-II-a).

c) Scattering multiplo.

Tutte le particelle cariche presenti nello sciame subiscono lo scattering multiplo. Per il calcolo delle deviazioni angolari e dei conseguenti spostamenti della particella dalla direzione di moto iniziale occorre appunto conoscere la funzione di distribuzione degli angoli di scattering multiplo.

Poichè questa distribuzione dipende, assumendo costanti i parametri che caratterizzano il materiale della targhetta, dalla energia della particella che subisce lo scattering e dallo spessore di materiale attraversato, anche per questo calcolo si propone una approssimazione che eviti la difficoltà rappresentata dalla variazione continua di energia della particella.

In pratica, attribuiremo alla particella un angolo quadratico medio di scattering multiplo, desunto dalla distribuzione degli angoli proiettati su un piano passante per l'asse del convertitore.

Assumendo, come già è stato fatto sopra (cfr. 2-I-a), che lo spessore della targhetta sia suddiviso in tanti strati di uguale lunghezza e che all'interno di ognuno di questi strati l'energia della particella rimanga costante, tale angolo quadratico medio viene calcolato in relazione al valore dell'energia e al percorso ef

fettivo della particella all'interno dello strato. A caso verrà poi assegnato il segno + o - al valore dell'angolo q.m. così calcolato.

In conseguenza della deflessione angolare le particelle subiscono anche uno spostamento radiale (rispetto all'asse del convertitore, che coincide con la direzione iniziale del fascio incidente), che viene calcolato, in modo ovvio, all'interno di ogni strato conoscendo la direzione con la quale la particella incide sullo strato dato.

d) Perdite d'energia per ionizzazione.

Le perdite d'energia per ionizzazione, dipendendo dalla energia della particella che degrada in modo continuo, devono essere calcolate introducendo al solito la suddivisione della targhetta in strati.

Per ogni strato, quindi, e naturalmente per il dato valore, ritenuto costante, dell'energia della particella, potremo calcolare le perdite d'energia per ionizzazione che andranno a diminuire l'energia della particella, quando essa passa nello strato successivo.

Al fine di determinare il comportamento termico del convertitore, risulta utile registrare la perdita media (per elettroni entrati) d'energia per ionizzazione in ogni strato in cui è suddivisa la targhetta.

II) Criteri del calcolo.

a) Come già avevamo accennato, di diversa natura sono i criteri in base ai quali si decide di non proseguire lo studio di una particella appartenente allo sciame. Oltre al criterio ovvio dell'uscita della particella dallo spessore del convertitore, nel presente calcolo abbiamo introdotto quello della molteplicità raggiunta dallo sciame.

Chiaramente in prima approssimazione, lo studio può essere esteso alle particelle di prima generazione, cioè all'elettrone primario, ai γ da esso emessi ed alle eventuali coppie create dai γ in questione. In questa approssimazione le particelle e^+ - e^- delle coppie create nello sciame verranno considerate unicamente dal punto di vista delle perdite d'energia per ionizzazione e per irraggiamento di γ di bassa energia ($K < 2mc^2$). Inoltre di esse saranno prese in considerazione le distribuzioni angolare e laterale.

Migliorando l'approssimazione lo studio può essere esteso alle particelle di II^a generazione. In tal caso le coppie e^+ - e^- di prima generazione sono seguite anche relativamente alla loro possibilità di irraggiare γ di energia sufficiente a creare altre coppie di II^a generazione. A queste ultime, però, non sarà data la possibilità di emettere γ con energia $K > 2mc^2$ e verranno perciò seguite solo per le perdite d'energia per ionizzazione, per irraggiamento di γ di bassa energia, e per lo scattering multiplo.

Questa duplice possibilità di estensione del calcolo risulta di notevole utilità al fine di stabilire, per ogni dato spessore del convertitore, il peso che viene ad avere nella determinazione del coefficiente di conversione elettroni-positroni la diversa molteplicità che si attribuisce allo sciame prodotto dall'elettrone primario incidente.

Per ambedue le approssimazioni, comunque, i positroni uscenti dal convertitore vengono classificati secondo tre parametri che sono: energia, angolo formato con la direzione del fascio incidente, spostamento dall'asse del convertitore. Analogamente, per le particelle γ uscenti la classificazione è basata sulla energia e sull'angolo d'uscita.

b) Un ulteriore criterio in base al quale decidiamo d'interrompere lo studio di una particella carica appartenente allo sciame è dato dalla energia della particella in esame. In effetti, se l'energia della particella è minore di $3mc^2$, i γ da essa emessi non possono creare coppia, ragion per cui in relazione al nostro studio si impone un taglio fisico per energie al di sotto di $3mc^2$.

D'altra parte per energie così basse risulta grossolana la valutazione delle perdite d'energia per ionizzazione.

Da questa considerazione derivano due conseguenze: la prima è che il taglio in energia può essere esteso alle particelle cariche alle quali, sia nella prima che nella seconda approssimazione del paragrafo precedente, non è data la possibilità di irraggiare γ di energia $K > 2mc^2$. Infatti seguire tali particelle, quando la loro energia diviene inferiore di $3mc^2$, significa incontrare nel calcolo delle perdite per ionizzazione le medesime difficoltà di cui si diceva sopra.

La seconda conseguenza è che per non cadere in grossi errori di valutazione delle perdite per ionizzazione possiamo interrompere lo studio delle particelle cariche quando la loro energia diviene minore di $3mc^2$. In pratica ci limiteremo a registrare una perdita d'energia, pari all'energia cinetica della particella, nello strato in cui tale particella avrà energia minore di $3mc^2$; e a considerare che la particella si sia fermata in quello strato.

Le perdite d'energia di questo tipo, registrate nei vari strati, serviranno come termine correttivo per il calcolo delle perdite per ionizzazione lungo il convertitore.

3. FORMULE USATE PER IL CALCOLO.

a) Bremsstrahlung.

La sezione d'urto di bremsstrahlung per un elettrone di energia E , per lunghezza di radiazione, è

$$(6) \quad \phi_{\text{rad}}(E, K) dK = \frac{1}{\ln(183 Z^{-1/3})} \frac{dK}{K} F(E, \nu)$$

dove K è l'energia del γ emesso; Z , il numero atomico del materiale di cui è fatta la targhetta.

La funzione $F(E, \nu)$ tiene conto dell'effetto di screening ed ha diverse espressioni in dipendenza, appunto, dal parametro ν che caratterizza lo screening:

$$(7) \quad \nu = 100 \frac{mc^2}{E} \frac{K}{E - K} Z^{-1/3}$$

L'espressione della $F(E, v)$, in relazione ai possibili valori di γ è:
per $0 < \gamma < 2$

$$(8) \quad F(E, v) = [1 + (1-v)^2] \left[\frac{f_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right] - \\ - \frac{2(1-v)}{3} \left[\frac{f_2(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right];$$

per $2 < \gamma < 15$

$$(9) \quad F(E, v) = [1 + (1-v)^2 - \frac{2(1-v)}{3}] \left[\ln \left(\frac{2E}{mc^2} \frac{1-v}{v} \right) - \frac{1}{2} c(\gamma) - f(Z) \right];$$

per $\gamma > 15$

$$(10) \quad F(E, v) = [1 + (1-v)^2 - \frac{2(1-v)}{3}] \left[\ln \left(\frac{2E}{mc^2} \frac{1-v}{v} \right) - \frac{1}{2} - f(Z) \right];$$

Nelle formule (8), (9), (10) abbiamo posto:

$$v = K/E;$$

$f(Z) = (Z/137)^2$ è il termine correttivo all'approssimazione di Born per elementi pesanti.

Le funzioni $f_1(\gamma)$, $f_2(\gamma)$, $c(\gamma)$ sono tabulate (cfr. per esempio (2)).

b) Creazioni coppie.

La sezione d'urto per creazione di coppie per un γ di energia K è:

$$(11) \quad \phi_p(K, E') dE' = \frac{1}{\ln(183 Z^{-1/3})} \frac{dE'}{K} G(K, v)$$

dove E' è l'energia cinetica del positrone.

La $G(K, v)$ tiene conto dello screening e, in dipendenza dal valore del parametro

$$(12) \quad r \approx 100 \frac{mc^2}{K} \frac{1}{v(1-v)} Z^{-1/3}$$

dove $v = (E' + mc^2)/K$

assume le seguenti espressioni:
per $0 < r < 2$

$$(13) \quad G(K, v) = [v^2 + (1-v)^2] \left[\frac{f_1(\Gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right] + \\ + \frac{2}{3} v(1-v) \left[\frac{f_2(\Gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right] ;$$

per $2 < \Gamma < 15$

$$(14) \quad G(K, v) = [v^2 + (1-v)^2 + \frac{2}{3} v(1-v)] \left[\ln \frac{2K}{mc^2} v(1-v) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} - c(\Gamma) - f(Z) \right] ;$$

per $\Gamma > 15$

$$(15) \quad G(K, v) = [v^2 + (1-v)^2 + \frac{2}{3} v(1-v)] \left[\ln \frac{2K}{mc^2} v(1-v) - \frac{1}{2} - f(Z) \right] .$$

Le funzioni $f_1(\Gamma)$, $f_2(\Gamma)$, $c(\Gamma)$ sono le stesse di quelle tabulate per la bremsstrahlung, dipendendo però ora dalla variabile Γ , definita dalla (12).

c) Scattering multiplo.

Lo scattering multiplo è trattato secondo la teoria elaborata da Bethe⁽³⁾, assumendo cioè che la distribuzione degli angoli proiettati sia data con sufficiente approssimazione da

$$(16) \quad f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\chi(B-0,7)^{1/2}} e^{-\frac{\theta^2}{(B-0,7)\chi^2}}$$

dove B è soluzione dell'equazione

$$B - \ln B = b$$

con

$$(17) \quad b = \ln \left\{ 6680 \frac{t}{X_0} \frac{(Z+1)Z^{1/3}}{A \left[1 + 3,34 \left(\frac{Z}{137} \right)^2 \right]} \right\}$$

e

$$(18) \quad \chi = \left(\frac{0,157}{A} \frac{(Z^2+Z)}{E^2} \frac{t}{X_0} \right)^{1/2}$$

In queste formule abbiamo introdotto dei nuovi simboli, che sono:

X_0 - la lunghezza di radiazione del materiale della targhetta in $g\ cm^{-2}$;
 t - lo spessore in lr attraversato dalla particella;
 A - il peso atomico del materiale della targhetta;
 E - l'energia della particella in MeV.

Poichè la distribuzione (16) degli angoli proiettati è gaussiana, l'angolo di scattering multiplo per le particelle di data energia E che attraversano uno spessore t del materiale sarà dato da

$$(19) \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (B - 0,7)^{1/2} \chi$$

dove B e χ sono definiti rispettivamente dalla (17) e dalla (18).

d) Perdite d'energia per ionizzazione.

Le perdite d'energia per ionizzazione per lr sono calcolate con la formula

$$(20) \quad K_{ion} = \frac{\pi mc^2}{2\alpha Z \ln(183 Z^{-1/3})} \frac{1}{\beta^2} \left| \ln \left(\frac{\pi^2 E^3}{mc^2 I^2(Z)} \right) - a \right|$$

dove

$$\alpha = 1/137 ; \quad \beta = v/c ;$$

$I(Z)$ è il potenziale di ionizzazione ($\approx I_H Z = 13,5Z$).

a è un parametro che caratterizza il segno della carica della particella considerata e vale

$$\begin{array}{ll} 2,9 & \text{per gli elettroni} \\ 3,6 & \text{per i positroni} \end{array}$$

e) Perdite d'energia per irraggiamento di γ con energia $K < 2mc^2$.

Le perdite d'energia per irraggiamento di particelle γ con energia $K < 2mc^2$ per lunghezza di radiazione sono date da K_{irr} definito dalla (1), in cui la $\phi(E,K)$ non è altro che la $\phi_{rad}(E,K)$ definita dalla (6).

4. CRITICA DELLE APPROSSIMAZIONI INTRODOTTE NEL CALCOLO.

a) Tra i processi fisici non abbiamo considerato l'effetto Compton, che diviene rilevante, rispetto al processo di creazione di coppie e per i materiali che noi consideriamo ($Z \approx 74$), per energie delle particelle γ al disotto di circa 5-7 MeV. Tenendo presente che per i positroni uscenti dal convertitore siamo interessati all'intervallo di energie $7 \div 12$ MeV, possiamo concludere che l'aver trascurato l'effetto Compton non dovrebbe comportare errori di rilievo nella determinazione del coefficiente di conversione nel succi

tato intervallo d'energie dei positroni.

Un errore apprezzabile, invece, è introdotto in tal modo nell'intervallo delle energie al disotto di ~ 5 MeV. Ma anche in considerazione del fatto che le sezioni d'urto per bremsstrahlung e per la creazione di coppie da noi usate divengono poco precise per energie così basse, trascurando l'effetto Compton si è voluta evitare una complicazione del calcolo, che non avrebbe comportato un vantaggio sostanziale nell'intervallo delle basse energie.

b) Il processo di bremsstrahlung è stato da noi schematizzato in due processi distinti:

- 1) emissione discontinua di γ con energia $K > 2mc^2$,
- 2) emissione continua di γ con energie $K < 2mc^2$.

Indubbiamente in tal modo vengono ad essere sopravvalutate le perdite d'energia dovute all'irraggiamento, in quanto nel nostro schema è come se i due processi fossero sovrapposti.

D'altra parte, l'errore che si fa con questa schematizzazione è senza dubbio inferiore a quello che si può commettere introducendo tagli artificiali nella sezione d'urto per bremsstrahlung al fine di evitare la divergenza che essa presenta per valori dell'energia del γ vicini allo zero.

Ciò può essere provato verificando che le perdite medie per irraggiamento di un elettrone che entra nel convertitore con energia E_0 devono essere uguali a

$$\Delta E_0 \approx E_0 e^{-x}$$

dove x è lo spessore, in lr , attraversato dall'elettrone. Variando il numero di strati in cui è suddivisa la targhetta, le perdite per irraggiamento possono essere avvicinate al valore medio suddetto con la voluta approssimazione.

c) Nel calcolo delle deviazioni angolari non si è tenuto conto della distribuzione angolare dei prodotti di bremsstrahlung e di creazione di coppie. Ciò è giustificato dall'ordine di grandezza degli angoli in questione per l'intervallo d'energie che ci interessa.

L'approssimazione di fondo fatta relativamente agli angoli di scattering multiplo consiste, invece, nell'aver sostituito alla distribuzione angolare (16) l'angolo quadratico medio (19) per un dato tratto di materiale, entro il quale l'energia della particella è considerata costante.

In effetti la validità di questa approssimazione potrà essere verificata eseguendo il calcolo per diversi valori del numero N di tratti in cui si suddivide la targhetta.

Aumentando questo numero si raggiungerà la situazione in cui la distribuzione angolare dei positroni e dei γ in uscita dalla targhetta per il dato N non si discosterà, entro i limiti voluti, dalla distribuzione ottenuta per il valore di N immediatamente precedente a quello dato. Questo potrebbe essere un criterio per giudicare della validità dell'approssimazione assunta.

d) L'aumento del numero di suddivisioni della targhetta porta certamente a dei miglioramenti anche nella trattazione del fenomeno

di perdita d'energia per ionizzazione. Ma già per valori non molto alti di questo numero ($N \approx 20$ per 1 lr) evitiamo l'errore di considerare costante l'energia delle particelle cariche per un tratto troppo lungo di materiale. Diminuendo la lunghezza di ogni tratto in cui è divisa la targhetta ci si assicura inoltre che la schematizzazione introdotta per il calcolo, secondo la quale all'interno di ogni strato si verifica al massimo un evento (emissione di γ di energia $K > 2mc^2$, creazione di coppie), possa essere considerata sufficientemente sicura.

e) Il fatto di avere limitato lo studio delle particelle dello sciamme ai prodotti di prima (o seconda) generazione deriva dalla considerazione che tale semplificazione sia valida per spessori del convertitore che non superino le 2 lunghezze di radiazione. Evidentemente un confronto dei risultati ottenuti dallo studio dei prodotti di I^a generazione soltanto e di I^a e 2^a generazione decide del grado di approssimazione, che dovrebbe peggiorare soltanto per spessori maggiori di 1,5 lr.

5. METODI NUMERICI E DIAGRAMMA A BLOCCHI.

Le estrazioni a caso dalle varie funzioni di distribuzione delle grandezze richieste dal calcolo vengono effettuate in base al metodo di Von Neumann.

La probabilità totale d'irraggiamento, definita dalla (2), e la probabilità totale di produzione di coppie, definita dalla (4), sono state preventivamente calcolate per diversi valori delle energie della particella carica e del fotone rispettivamente, ed entrano nel calcolo come dati tabulati. Il valore di queste probabilità in corrispondenza di un qualsiasi valore dell'energia viene definito nel corso del calcolo attraverso un processo di interpolazione.

L'equazione trascendente (17) viene risolta nel corso del calcolo con un metodo iterativo che permette una rapida convergenza.

Il diagramma a blocchi è riportato in fig.2. Il parametro LSW che compare nel diagramma definisce la scelta dell'approssimazione con cui si desidera studiare lo sciamme. A seconda che il valore di questo parametro sia positivo o negativo, lo studio dello sciamme comprende i prodotti di seconda generazione oppure si arresta a quelli di prima generazione.

Nel primo caso alle particelle è attribuita nel diagramma una individualità secondo lo schema della fig.3.

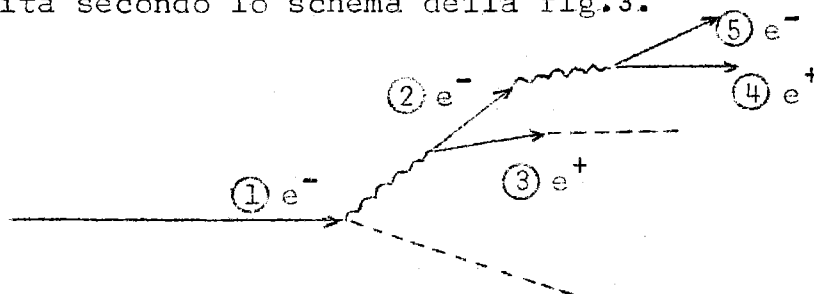


FIG. 3

Qui con ① si è indicato l'elettrone primario; con ② e ③ le particelle cariche alle quali, nell'approssimazione trattata, è attribuita la possibilità di emettere γ con energia $K > 2mc^2$; con ④ e ⑤ le particelle che possono emettere γ con energia $K < 2mc^2$.
Nel secondo caso lo schema è semplificato come in fig. 4.

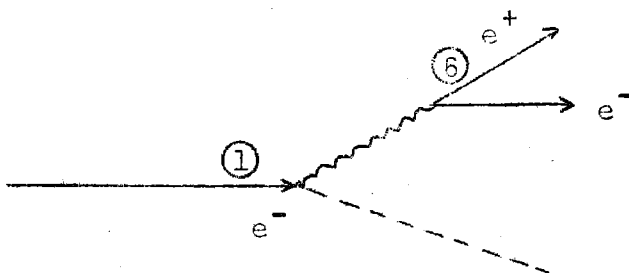


FIG. 4.

Con ① si è ancora indicato l'elettrone primario; con ⑥ le particelle cariche che non possono, nella data approssimazione, dar luogo a γ con $K > 2mc^2$.

Poichè i positroni uscenti dal convertitore sono caratterizzati dai parametri energia, posizione ed angolo, essi vengono incasellati in una matrice tridimensionale. Ad ogni dimensione della matrice corrisponde l'intervallo di variazione di un parametro; l'intervallo può essere suddiviso in tratti di diversa lunghezza secondo criteri voluti.

Analogamente i γ uscenti dalla targhetta vengono incasellati in una matrice bidimensionale (angolo-energia).

6. NOTA.

Del presente calcolo è stato elaborato un programma in linguaggio SPS, per calcolatore elettronico IBM 1620, che aveva come scopo essenziale quello di vagliare in prima approssimazione la validità di alcune ipotesi da noi introdotte. Tale programma, soprattutto a causa della limitata capacità di memoria di cui dispone il calcolatore per cui è stato elaborato e degli alti tempi di calcolo, prevede lo studio dei soli prodotti di prima generazione. La storia di ognuna delle particelle che fanno parte dello scintillato in cui è suddiviso lo spessore della targhetta.

Il programma completo (scritto in linguaggio FORTRAN) è stato trasferito, per le prove che permettessero di definire i tempi di calcolo con maggiore esattezza e quindi di avere l'ordine di grandezza del tempo necessario per uno studio completo della conversione elettroni-positroni, sul calcolatore IBM 704 del centro di calcolo di Bologna.

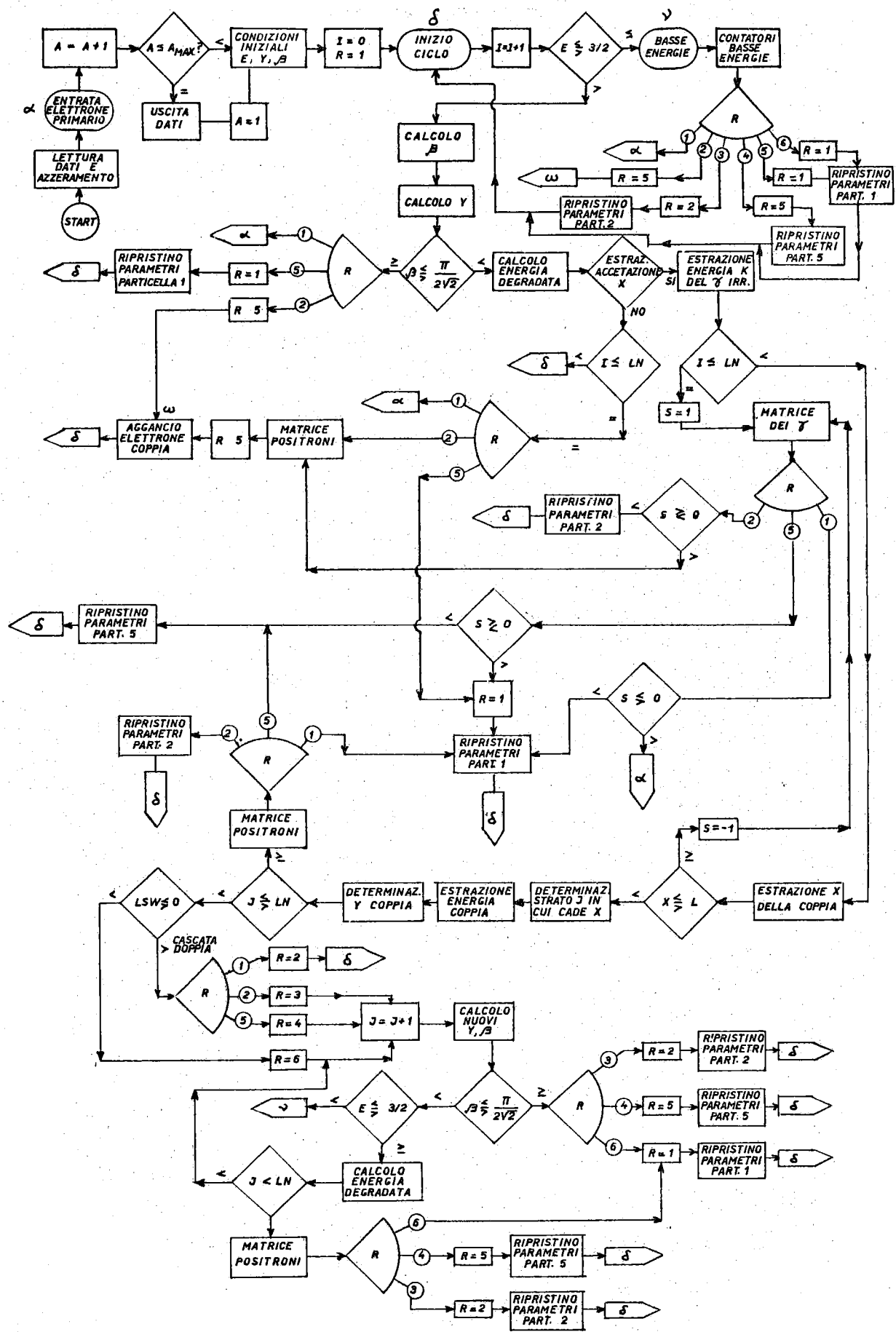


FIG. 2

L'utilizzazione, seppure non prolungata, di ambedue i programmi ha permesso di ottenere alcuni risultati relativi alla distribuzione delle perdite d'energia per ionizzazione da parte delle particelle cariche lungo il convertitore. La durata del calcolo, prevista in base alle prove suddette, impone, per ottenere una statistica sufficientemente buona nei risultati relativi alla distribuzione dei prodotti della conversione, l'utilizzazione di un calcolatore più veloce quale ad esempio il 7090 IBM del Centro di Calcolo di Ispra.

Ringraziamo l'ing. F. Amman e i Proff. C. Bernardini e A. Turrin per gli utili consigli e le numerose discussioni.

BIBLIOGRAFIA.

- (1) T.L. Aggson et L. Burnod, "Production de positrons a l'accélérateur d'Orsay. Détermination de la section efficace a 0° sur cibles épaisses", Rapport LAL.27, Octobre 1962.
- (2) B. Rossi, "High-energy particles" (Prentice Hall, New York, 1952)
- (3) H.A. Bethe, Phys. Rev. 89, 1256 (1953).